

O'rin almashtirish & Kombinatorika

Kirish

1-qism

1.1 Faktorial tushunchasi

Faktorial : Dastlabki ketma-ket n ta natural son ko'paytmasi " n faktorial" va bu $n!$ deb yoziladi.

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

demak, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

1.2 Faktorilaning xossalari

(i) $n!$ faqat musbat butun qiymatga ega bo'ladi.

(ii) Faktorialdagi n soni kasr yoki manfiy son bo'lmaydi.

(iii) $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = [1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)] n = (n-1)! n$

Demak, $n! = n(n-1)!$

(iv) $0! = 1$ (tushuntirish berib o'tiladi)

(v) Agar ikki faktorial teng bo'lsa, $x!$ va $y!$ teng bo'lsa, bunda $x = y$; $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$.

Misolda ko'ramiz :

Agar $\frac{n!}{2!(n-2)!}$ va $\frac{n!}{4!(n-4)!}$ Sonlar 2 : 1 nisbatda bo'lsa, n ning qiymatini toping?

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1}{2!(n-2)!}$$

$$= \frac{n(n-1) \{(n-2)(n-3) \dots 3 \times 2 \times 1\}}{2!(n-2)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

Xuddi shunday,

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{4!(n-4)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

Berilgandan: $\frac{n!}{2!(n-2)!} : \frac{n!}{4!(n-4)!} = 2 : 1$

$$\Rightarrow \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{(n-2)(n-3)} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow (n-2)(n-3) = 6$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n = 0 \quad n = 0, 5$$

Lekin, $n = 0, (n-2)!$ va $(n-4)!$ lar

Manoga ega emas.

demak, $n = 5$.

TEST - 1

Quyidagilardan $\frac{(2n)!}{n!}$ ifodaga tenggini toping:

- (A) $\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)\} 2^n$ (B) $\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)\} 2^n n!$
 (C) $\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)\} 2^n$ (D) t.j.y

Yechish : (A)

Faktorial ifodalanishidan foydalanib:

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n)}{n!}$$

Toq va juft sonlarga ajratib olamiz :

$$\begin{aligned} &= \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)\} \{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n\}}{n!} = \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)\} 2^n n!}{n!} \\ &= \{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)\} 2^n \end{aligned}$$

★ 1.3 $n!$ dagi p tub sonning darajasi.

p tub son va n natural son bo'lsin. Bu yerda $1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ sonlar ichidan p tub songa

$\left[\frac{n}{p}\right]$ tasi bo'linadi. $\left[\frac{n}{p}\right]$ -soni n/p dan kichik bo'lgan eng katta butun son.

$D_p(n!)$ - p tub sonning n faktorialdagi darajasi deb olaylik. Bunda,

$$\begin{aligned} D_p(n!) &= D_p(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n) \\ &= D_p\left(p \cdot 2p \cdot 3p \cdot \dots \cdot \left[\frac{n}{p}\right] p\right) \end{aligned}$$

[Malumki qolgan 1 va n orasidagi sonlardan yana boshqasi p tub songa bo'linmaydi]

$$= \left[\frac{n}{p}\right] + D_p\left(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \left[\frac{n}{p}\right]\right)$$

Endi, $1, 2, 3, \dots, \left[\frac{n}{p}\right]$ sonlar ichida p tub songa bo'linadiganlar :

$$\left[\frac{n/p}{p}\right] p = \left[\frac{n}{p^2}\right] p$$

$$\therefore D_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + D_p\left(p \cdot 2p \cdot \dots \cdot \left[\frac{n}{p^2}\right] p\right)$$

[Malumki qolgan 1 va $[n/p]$ sonlari orasida yana boshqasi p tub songa bo'linmaydi.]

$$= \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + D_p \left(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left[\frac{n}{p^2} \right] \right)$$

Shu tarzda davom etib quyidagiga ega bo'lamiz :

$$D_p(n!) = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^t} \right]$$

[Bu yerda t eng katta natural son, ushbu qo'shtengsizlik uchun $p^t \leq n < p^{t+1}$]

Kerakli: Bu darajani topish murakkab sonlar uchun o'rinli emas.

Masalan :

6 ning $n!$ dagi darajasini topishimiz uchun 6 ning tarkibidagi 2 va 3 tub sonlar uchun ishlata olamiz.

Misolda ko'ramiz :

2 ning $50!$ tarkibidagi darajasini toping?

$$D_2(50!) = \left[\frac{50}{2} \right] + \left[\frac{50}{2^2} \right] + \left[\frac{50}{2^3} \right] + \left[\frac{50}{2^4} \right] + \left[\frac{50}{2^5} \right] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$$



TEST- 2

100! ning qiymati nechta «0» bilan tugaydi:

- (A) 20 (B) 24 (C) 97 (D) 28

Yechish: (B)

malumki, $10 = 5 \times 2$

Shu bois 10 asosli daraja uchun, bizga 2 va 5 tub sonlari kerak.

10 ning mavjud eng katta darjasi - $\min\{D_2(100!), D_5(100!)\}$

$$\begin{aligned} D_2(100!) &= \left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{2^2} \right] + \left[\frac{100}{2^3} \right] + \left[\frac{100}{2^4} \right] + \left[\frac{100}{2^5} \right] + \left[\frac{100}{2^6} \right] \\ &= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97 \end{aligned}$$

$$D_5(100!) = \left[\frac{100}{5} \right] + \left[\frac{100}{5^2} \right] = 20 + 4 = 24$$

$$D_{10}(100!) = \min\{97, 24\} = 24$$

Sanashlarning fundamental pirinsiplari

2-qism

2.1. Qo'shish pirinsipi

Biron bir ish m ta turli yo'lida va boshqa bir ish birinchi ishga bog'liq bo'lmagan ish esa n ta turli-xil yo'lida bajariladi. Bu ikki ishdan birini bajarishda jami $(m + n)$ ta yo'l bo'ladi.

Misolda ko'ramiz:

Shaharga shimlodan 15 ta darvoza orqali va janubdan esa 10 ta darvoza orqali kirish mumkin.

Shaharga necha xil usulda shaharga kirish mumkin?

Shimoldan kirishlar soni = 15 ta

Janubdan kirishlar soni = 10 ta

Kirishda shimol yoki janubdan kirish darvozalar bor.

Shunday ekan shaharga kirishlar jami = $15 + 10 = 25$ ta

TEST - 3

Sinfdagi 26 ta o'quvchidan 23 tasi o'g'il bola va 3 tasi qiz bola. O'qutuvchi sinfdan Qiz yoki o'g'il bolani sinf nazorat ishini olishga tayinlaydi. Necha xil usulda o'qutuvchi bu tayinlovni qila oladi?

(A) 3

(B) 23

(C) 26

(D) 69

Yechish : (C)

O'g'il bolalardan nazorat ishi oluvchi tayinlash 23 usulda.

Qiz bolalardan nazorat ishi oluvchini tayinlash 3 usulda.

O'qutuvchi tayinlovni o'g'il yoki qiz boladan jami = $23 + 3 = 26$ ta usulda amalga oshiradi.

2.2. Ko'paytirish pirinsipi

$$m \times n \times p \times \dots$$

Misol uchun :

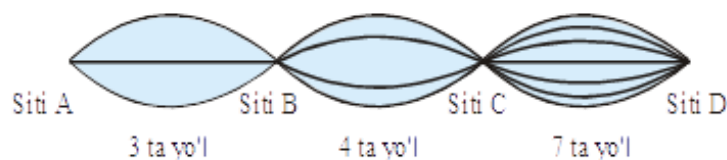
A ish va B ish birgalikda $a - p, a - q, b - p, b - q, c - p, c - q$. A ishning 3 usuli va B ishning 2 usulda

Jami usullar soni = $2 + 2 + 2 = 2$ lar 3mara qo'shildi = $2 \times 3 = 6$.

Umuman olganda jami = $m \times n$ ta bunda m va n usullar turli ishlarning birgalikda bajarish usullari soni.

Misolda ko'ramiz :

3 ta yo'l A sitidan B sitiga va 4 ta yo'l B sitidan C sitiga va 7 ta yo'l C sitidan D sitiga olib boradi. Necha xil usulda Jumagul A sitidan D sitiga B va C sitilar orqali chiqib bora oladi?



A sityidan B sitiga jami = 3 ta.

B sitidan C sitiga jami = 4 ta.

Xuddi shunday C sitidan D sitiga = 7 ta.

Sanashning fundamental pirinsipidan,

Jumagul A sitidan D sitiga B va C siti orqali olib boruvchi yo'llarni jami soni $= m \times n \times p$
 $= 3 \times 4 \times 7 = 84$ ta yo'l.

TEST - 4

A sitida 12 ta darvozo bor. Necha xil usulda Shomurod bir darvozadan kirib boshqa bir chiqib ketadi ?

(A) 23

(B) 144

(C) 132

(D) 24

Yechish : (C)

yani 11 ta darvozada chiqib ketishi mumkin.

Shunday ekan sanashning fundamental pirinsipidan:

Jami kirib chiqishlar soni $12 \times 11 = 132$ ta usulda.

TEST - 5*Necha usulda n xonali sonni 1, 2, 3, 7, 9 raqamlarni takrorlamasdan tuzish mumkin?**Bu yerda :*(i) $n = 5$ (A) 120 (B) 15 (C) 6^5 (D) 5^6 (ii) $n = 3$ (A) 12 (B) 5^3 (C) 60 (D) 3^5

Yechish : (i) . (A) (ii) . (C)

(i) **5 xonali sonlarda:**

5 xonali sonni hosil qilish uchun jami 5 joyni to'ldirish kerak:

Joylar :

--	--	--	--	--

Tanlashlar soni : 1 2 3 4 5

Birlar xonasiga bu 5 ta raqamdan ixtiyoriy biri bilan 5 xil raqam joylasha oladi.

O'nlar xonasiga esa bir raqamning ishlatilganligi uchun 4 xil raqam joylasha oladi .

Boshqa joylarga ham raqamlar shu tarzda kamroq raqamlar joylasha oladi.

Bu 5 ta joyga joylashishlarning jami $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

Demak, jami 120 ta 5 xonali son tuzish mumkin.

(ii) **3 xonali sonlarda:**

3 xonali sonlarni tuzish uchun uchta joyni to'ldirish kifoya, yani birlar, o'nlar va yuzlar xonasini.

Joylar :

--	--	--

Tanlashlar soni : 3 4 5

Bu uchta joyga joylashishlar soni jami $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

Demak, jami 60 ta uch xonali son tuzish mumkin.

TEST- 6

Jam necha usulda 3 ta harfli so'zni a, b, c, d, e harflaridan hosil qilinadi :

(i) *Harflarni takrorlash mumkin emas*

- (A) 60 (B) 5^3 (C) 3^5 (D) 12

(ii) *Harflarni takrorlash mumkin?*

- (A) 60 (B) 5^3 (C) 3^5 (D) 12

Yechish : (i) . (A) (ii) . (B)

(i) **Takrorlash mumkin emas :**

Hosil qilish mumkin bo'lgan so'zlarning jami soni uchta o'ringa joylashlar soniga teng.

Joylar :



Tanlashlar soni :

5 4 3

Birinci harfga (a, b, c, d, e) shu beshtasidan birini 5 ta variant bor.

Shunday tarzda ikkinchi va uchunchi o'rinlarga 4 va 3 harf tanlash mumkin.

$$\Rightarrow \text{Jami joylashishlar soni} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Demak, 60 ta uch harfli so'z tuzish mumkin.

(ii) **Takrorlash mumkin:**

Bunda uch o'ringa ham teng miqdorda harflarni joylashtirish mumkin.

Joylar :



Tanlashlar soni :

5 5 5

Birchi joy 5 ta harfni olishi mumkin (a, b, c, d, e).

Agar takrorlash mumkin bo'lsa keyingi joylarham bu a, b, c, d, e 5 ta harfni olishi mumkin.

$$\text{Barcha joylashishlar soni} = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Demak, 125 ta uch harfli so'zni hosil qilish mumkin.

TEST- 7

0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlardan nechta 4 xonali sonni hosil qilish mumkin ?

- (A) 5^4 (B) 4^5 (C) 300 (D) 150

Yechish : (C)

Bu yerda minglar xonasida «0» raqamini ishlata olmaymiz, birinchi raqam 5 ta turli -xil bo'lishi mumkin.

Joylar :

--	--	--	--

Tanlashlar soni : 5 5 4 3

3 ta raqamni olshi mumkin (qolgan uch raqam).

Hamma tanlashlar soni jami $= 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

Demak, 300 ta to'rt xonali son mavjud.

Test - 8

Necha xil usulda 6 ta bola bir qator o'tirishi mumkin?

- (A) $6!$ (B) 6^6 (C) 6^5 (D) 5^6

Yechish : (A)

n ta turli obyektning n ta joyga joylashishi bo'lib,

6 ta bolaning 6 ta joyga joylashishlar sonini topishimiz kerak.

Joylar :

--	--	--	--	--	--

Tanlashlar soni : 6 5 4 3 2 1

Bu joylarga joylashishlarning jami soni $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$

Demak, 720 ta o'rin almashtirish bilan joylashtirish mumkin.

TEST - 9

0, 1, 2, 3, 4, 5 ushbu raqamlardan nechta 5 xonali toq sonni, takrorlashsiz hosil qilish mumkin?

- (A) $4 \times 4!$ (B) 288 (C) $5!$ (D) 300

Yechish : (B)

Bu yerda, 5 ta raqamni 5 ta joyga joylashtirish.

Joylar:

--	--	--	--	--

Tanlashlar soni : 4 4 3 2 3

Toq sonni hosil qilish uchun 5-joyga 1, 3, 5 raqamlari ya'ni 3 xil tanlash bor.

Birinchi joyga joylashishlar soni $= 4$ (0 dan va bitta toq raqam 5-joyga joylashgandan tashqari).

Shu tarzda 2-, 3-, 4- joylarga 4, 3, 2 xil tanlashlar mavjud.

5 ta joyga joylashishlarni sanashning fundamental prinsipidan=

$= 5$ xonali toq sonlar soni jami $= 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 288$ ta.

TEST - 10

0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlarni takrorlamasdan nechta juft 5 xonali sonni tuzish mumkin?

(A) 120

(B) 192

(C) 312

(D) 208

Yechish : (C)

5 xonali son 2 ga bo'linadi,

Ikkinchi holda 0 bilan tugan juft sonlarni ko'ramiz.

Hol-I : 2 yoki 4 bilan tugagan juft sonda.

5 xonali sonlar soni 5 ta joyga joylashishlar soniga teng.

Joylar :



Tanlashlar soni :

4 4 3 2 2

5-joy 2 yoki 4 yani 2 usulda tanlash mumkin.

Birinchi joy 4 ta usulda tanlash mumkin (0 va 5-joyga joylashgan raqamdan tashqari)

Shu tarzda 2-,3-,4- joylarga tanlashlar soni mos ravishda 4, 3, 2 ts.

Sanashning fundamental pirinsipiga binoan,

5 ta joyni bir vaqtda to'ldirishlar soni

$$= 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 192 \text{ ta}$$

... (i)

Hol-II : 0 raqami bilan tugagan juft sonda.

Joylar :



Tanlashlar soni :

5 4 3 2 1

5 xonali sonlar soni 5 ta joyga joylashishlar soniga teng.

5-joy faqat 0 bilan demak 1 ta tanlash.

1-joyga 5 ta raqamni tanlash mumkin (1, 2, 3, 4, 5 raqamlardan birini).

Shu tarzda 2-,3-,4- joylarga raqamlarni tanlashlar soni 4, 3, 2 ta usulda.

Sanashning fundamental pirinsipidan,

Bir vaqta 5 ta joyga joylashishlar soni:

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

... (ii)

(i) va (ii) larni birlashtiramiz:

5 xonali juft sonlarni tanlashlar jami soni $= 192 + 120 = 312$ ta.

10. 0, 1, 2, 3, 4, 5 ushbu raqamlardan nechta 4 ga bo'linadigan 5 xonali son tuzish mumkin ?
 (A) 144 (B) 72 (C) 288 (D) 312

Yechish : (A)

5 xonali sonni tuzishlar soni 5 ta joyga joylashishlar soniga teng.

Hol-I :

Oxirgi 2 joyda 04, 20, 40 lar joylashsa.

4- va 5-joylarga bir vaqtda jami 3 ta tanlashga ega bo'lamiz: 04, 20, 40



1-joyga 4 ta tanlash mumkin (4-va 5-joyga joylashgan raqamlardan tashqari).

Shu tarzda 2-,3- joylarga 3 ta va 2 ta raqamni tanlash mumkin.

Sanashning fundamental pirinsipiga binoan,

5 ta joyga joylashishlarni jami soni $= 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$ ta ... (i)

Hol-II :



Oxirgi 2joyda 12, 24, 32, 52 lar joylashsa.

4-va 5-joylarga joylashishlar soni 4 ta (12, 24, 32, 52 lardan biri).

1-joyga 3 ta raqamni tanlash mumkin (0 va 4-,5-joydagi raqamlardan tashqari)

Shu tarzda 2- va 3-joylarga tanlashlar soni mos ravishda 3 ta va 2 ta.

Sanashning fundamnetal pirinsipiga binoan,

5 ta joyga joylashishlar soni $= 3 \times 3 \times 2 \times 4 = 72$ ta. ... (ii)

(i) va (ii) lar birgalikda:

Jami 5 ta joyga joylashishlar soni = 4 ga bo'linadigan 5 xonali sonlar soni $= 72 + 72 = 144$ ta.

TEST- 12	0, 1, 2, 3, 4, 5 ushbu raqamlarni orqali nechta 25 ga karrali 6 xonali son tuzish mumkin?				
(A) 24	(B) 42	(C) 256	(D) 100		

Yechish : (B)

Bu raqamlardan 25 ga karrali bo'lishi uchun 25 yoki 50 bilan tugashi kerak.

Hol-I : 25 bilan tugasa.

Joylar :

----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Tanlashlar soni :

3	3	2	1	1	1
---	---	---	---	---	---

Sanashning fundamental prinsipiga binoan, jami 6 xonali 25 ga karrali oxiri 25 sonlar soni

$\Rightarrow 3 \times 3! = 18$ ta bo'lishi mumkin.

Hol-II : 50 bilan tugasa.

Joylar :

----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Tanlashlar soni :

4	3	2	1	1	1
---	---	---	---	---	---

Sanashning fundamental prinsipiga binoan, jami 6 xonali 25 ga karrali oxiri 50 sonlar soni

$\Rightarrow 4! = 24$ ta bo'lishi mumkin.

Demak, 25 ga karrali barcha 6 xonali sonlar soni $= 18 + 24 = 42$ ta